21/12/2016

Θεώρημα (Γενικευμένο Θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy)

Έστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε

(i) f,g συνεχείς στο $[a,b]$

(ii) f,g παραγωγίσιμες στο (a,b)

(iii) Οι f',g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (a,b)

(δηλ. δεν υπάρχει $x \in (a,b)$ ώστε $f'(x)=0=g'(x)$)

(iv) $g(a) \neq g(b)$

Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Αποδειξη

Ορίζουμε $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=(f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)$

Τοτε η h ειναι συνεχης στο $[a,b]$ παραγωγίσιμη στο (a,b) με $h'(x)=(f(b)-f(a))g'(x)-(g(b)-g(a))f'(x)$

$h(a)=(f(b)-f(a))g(a)-(g(b)-g(a))f(a)=$
$=f(b)g(a)-f(a)g(b)$.
$h(b)=(f(b)-f(a))g(b)-(g(b)-g(a))f(b)=$
$=f(b)g(a)-f(a)g(b)$

$h(a)=h(b)$.

Απο το Θεώρημα Rolle
υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $h'(\xi)=0$
$\Rightarrow (f(b)-f(a))g'(\xi)=\underbrace{(g(b)-g(a))}_{\neq 0}f'(\xi)$. (1)

Ομως $g'(\xi)\neq 0$
Αν $g'(\xi)=0$ τοτε απο την (1).
$\underbrace{(g(b)-g(a))}_{\neq 0}f'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=0$

άρα ξ κοινή ρίζα των f',g' άτοπο

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Θεώρημα (Κανόνας De L'Hospital)
$1^{η}$ μορφή ($\frac{0}{0}$ στο x_0)

Αν $f,g:(a,x_0)\cup(x_0,b)\to\mathbb{R}$.

ώστε

(i) f, g παραγωγίσιμες

(ii) $g(t) \neq 0$, $g'(t) \neq 0$ $\forall t \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$

(iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

(iv) Υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ [όπου $l \in \mathbb{R}$ ή $l = +\infty$ ή $l = -\infty$]

Τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Απόδειξη

Θα το αποδείξουμε στην περίπτωση που $l \in \mathbb{R}$.

Επεκτείνουμε τις f, g στο σημείο x_0 ορίζοντας

$f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$

Λόγω της υπόθεσης (iii) οι f, g θα είναι συνεχείς στο x_0

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

(ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$).

Έστω $x \in (x_0, b)$

Τότε $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$

Θα εφαρμόσουμε το γενικευμένο θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy στο $[x_0, x]$

(i) Οι f, g είναι συνεχείς στο $[x_0, x]$

(ii) Οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο (x_0, x)

(iii) Οι f', g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (x_0, x)

(εφόσον $g'(t) \neq 0$ $\forall t$)

(iv) $g(x_0)=0 \neq g(x)$

Απο το γενικευμενο Θ.Μ.Τ του Cauchy υπαρχει $\xi_x \in (x_0,x)$ ώστε

$$\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Δειχνουμε τωρα οτι $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Εστω $\varepsilon > 0$

Εφόσον $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$

υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - \ell\right| < \varepsilon$ $\forall t$ με $x_0 < t < x_0+\delta$

Αν τωρα x με $x_0 < x < x_0+\delta$

τοτε $x_0 < \xi_x < x < x_0+\delta$

και άρα

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| = \left|\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - \ell\right| < \varepsilon$$ Συνεπως $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Αποδεικνύεται και Θεωρημα De L'Hospital για όρια της μορφής $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Διατύπωση γενικής μορφής το Θ. De L'Hospital

Αν $\lim_{x\to [\,]} f(x) = \pm \lim_{x\to [\,]} g(x) = \{\ \}$

και $\lim_{x\to [\,]} \frac{f'(x)}{g'(x)} = (\ \ )$

Τότε $\lim_{x\to [\,]} \frac{f(x)}{g(x)} = (\ \ )$

Οπου [ ] $\quad a, a^+, a^-, +\infty, -\infty$
$a \in \mathbb{R}$

{ } $\quad 0$ ή $+\infty$ ή $-\infty$

( ) $\quad l$ ή $+\infty$ ή $-\infty$
$l \in \mathbb{R}$

<u>Προσοχή</u>
Αν το όριο της $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει το Θεώρημα του De L'Hospital δεν εφαρμόζεται και το όριο της $\frac{f(x)}{g(x)}$ μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει.

Παραδείγματα
α) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+x^2}$

→ Χωρίς De L'Hospital.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1+x} = 1\cdot 1 = 1.$$

→ Με χρήση Θ. De L'Hospital.
Θεωρούμε $f(x)=\sin x$, $g(x)=x+x^2$ | $f'(x)=\cos x$, $g'(x)=1+2x$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+2x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Απο Θεώρημα De L'Hospital.
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ δηλ. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x+x^2} = 1$

β) Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x - \sin x}$

$f(x) = 2\sin x - \sin 2x$ } $f'(x) = 2\cos x - 2\cos 2x$

$g(x) = x - \sin x$ } $g'(x) = 1 - \cos x$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$

$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ $\lim_{x\to 0} g'(x) = 0$ (2)

$f''(x) = -2\sin x + 4\sin 2x$

$g''(x) = \sin x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 8\sin x\cos x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} -2 + 8\cos x = 6 \quad (*)$$

Απο το Θεωρ. De L'Hospital (λόγω (2) + (*)).

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 6 \quad (**)$$

Απο το Θεωρ. De L'Hospital (λόγω (1) + (**)).

προκύπτει ότι $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 6$.

Σημείωση

1) Θα μπορούσαμε να είχαμε εφαρμόσει τρίτη φορά το De L'H

2) $$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{1 - \cos x} = \frac{2\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) - 2\left(1 - 2\sin^2 x\right)}{1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)}$$

$(\cos 2a = 1 - \sin^2 a)$

$$= \frac{4\left(\sin^2 x - \sin^2\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\frac{x}{2}} = 2\,\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{x}{2}} - 2 = 2\cdot 4\,\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2} - 2 \xrightarrow{x\to 0}$$

0

γ) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$

$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$g(x) = \sin x$ $\quad g'(x) = \cos x$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

Η συνάρτηση

$\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$

(δεν έχει όριο καθώς $x\to 0$)

Το Θεώρημα De L'Hospital δεν εφαρμόζεται.

Παρατηρούμε ότι

$\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \dfrac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{\sin x}{x}}$ $\quad$ Έχουμε $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Άρα $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = 0$

δ) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\log x}{x}$

$f(x) = \log x$ | $f'(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = x$ | $g'(x) = 1$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Από Θεωρ. De L'Hospital

$\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

ε) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x}$

$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ άρα $\lim_{x\to 0^+} (\log x)\frac{1}{x} = -\infty$.

στ) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x}$

$f(x) = \sin x - x \qquad f'(x) = \cos x - 1$

$g(x) = x\sin x \qquad g'(x) = \sin x + x\cos x$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \frac{\cancel{1} - 2\sin^2\frac{x}{2} - \cancel{1}}{x\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x\right)} =$$

$$= \frac{-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin\frac{x}{2}}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} \xrightarrow{x\to 0} \frac{-1\cdot 0}{1+1} \to 0$$

Απο το Θεωρ. De L'H προκύπτει

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ Άρα $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = 0$

ζ) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$.

$f(x) = x^2 - \sin^2 x$

$g(x) = x^2 \sin^2 x$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$

$f'(x) = 2x - \overbrace{2\sin x\cos x}^{\sin 2x}$

$g'(x) = 2x\sin^2 x + x^2 \cdot \underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}$

$\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$

$\lim_{x\to 0} g'(x) = 0$

$f''(x) = 2 - 2\cos 2x$

$g''(x) = 2\sin^2 x + 2x\sin 2x + 2x\sin 2x + x^2 2\cos 2x$

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{2(1-\cos 2x)}{2\sin^2 x + 4x\sin 2x - 2x^2\cos 2x} =$$

$$= \frac{2\cdot 2\sin^2 x}{2\sin^2 x + 4x\sin 2x + 2x^2\cos 2x} =$$

$$= \frac{4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + 4\cdot 2\,\frac{\sin 2x}{2x} + 2\cos 2x} \xrightarrow{x\to 0}$$

$$\frac{4\cdot 1^2}{2+8+2} = \frac{1}{3}$$

Από Θ. D L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1/3.$$

Από Θ De L'H.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$$

δηλ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = 1/3$